Valentín V. Petrov

Ernesto Mordecki

TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

Facultad de Ciencias

DIRAC – 2008

La publicación de este libro fue realizada con el apoyo de la
Comisión Sectorial de Investigación Científica (CSIC)
de la Universidad de la República.

Petrov, Valentín
Teoría de la Probabilidad / Valentín Vladímirovich Petrov, Ernesto Mordecki Pupko.– 2a. ed.–
Montevideo: DIRAC, 2008.

272 pp. : 12 il.
Bibliografía p. 267
ISBN: 978-9974-0-0433-7

1. PROBABILIDAD 2. PROCESOS ESTOCÁSTICOS

60-01 AMS MSC2000

Imagen de tapa: "Distribuciones Gaussianas II" de Anatoly T. Fomenko (cortesía del autor)
Diseño de tapa: Alejandro Crosa
Asistente de edición: Gabriel Santoro
Publicado por DIRAC – Facultad de Ciencias – Universidad de la República
Calle Iguá 4225 casi Mataojo – Montevideo – Uruguay
Tel. (0598 2) 525 17 11 – Fax (0598 2) 525 86 17 – e-mail: dirac@fcien.edu.uy

Prólogo

La literatura dedicada a la enseñanza de la teoría de la probabilidad es muy extensa; existen numerosos libros de texto, excelentemente escritos, para lectores con diferentes niveles de formación en matemática. Entre estos textos, podemos destacar los escritos por Borovkov [1], Feller [2], Gnedenko [3], Gut [4], Ross [6], y Shiryaev [7], incluidos en la bibliografía al final de este libro. Sin embargo, la literatura dedicada a esta temática en idioma español es escasa, y tenemos la esperanza de que la presente publicación llenará este vacío, en alguna medida.

Este libro contiene un primer curso de teoría de la probabilidad, basado en cursos dictados por ambos autores, a lo largo de muchos años, en la Universidad de San Petersburgo (Rusia) y en la Universidad de la República (Montevideo, Uruguay). En el proceso de su preparación se han tenido en cuenta especialmente los intereses de lectores con diferentes niveles de preparación matemática: el material contenido en el libro es perfectamente accesible para quienes hayan estudiado los temas de un curso habitual de cálculo diferencial e integral. Los lectores en esta situación, podrán restringirse a la consideración de variables aleatorias con distribuciones discretas o absolutamente continuas, que son las encontradas en las aplicaciones; se presta especial atención a estas dos clases de distribuciones. En particular, se presenta una exposición detallada de las nociones de esperanza matemática de una variable aleatoria, varianza de una variable aleatoria, esperanza condicional de una variable aleatoria con respecto de otra, y cuestiones relacionadas, para estas dos clases de distribuciones. Al mismo tiempo, y en forma independiente, se definen estas nociones en los términos habituales de la teoría de la medida e integración con respecto de medidas abstractas[1]. Esta segunda exposición está dirigida a estudiantes

[1]El lector interesado en tomar contacto con los elementos básicos de la teoría de la medida, y de la integración con respecto de medidas abstractas (análisis real), luego de un curso de cálculo diferencial e integral, podrá utilizar la excelente exposición en

de matemática o estadística, quienes encontrarán una presentación rigurosa, de interés, y actualizada de la disciplina. Cada capítulo se acompaña de un conjunto de ejercicios, ordenados según su grado de dificultad, y el lector no debe desanimarse si no resuelve todos los ejercicios. Se prestó especial cuidado en la presentación de las demostraciones de los teoremas, proposiciones y lemas, por lo que este libro puede utilizarse en forma autodidacta.

La iniciativa de realizar el presente libro correspondió a V. Petrov, quien escribió los 7 primeros capítulos. E. Mordecki escribió los últimos tres capítulos, y preparó el texto en español. Todo el material fue discutido y revisado en forma conjunta. Varias personas estuvieron involucradas, en diferentes formas, con la preparación de este libro. Walter Moreira preparó los gráficos y las tablas, y prestó invalorable ayuda en la preparación de la versión electrónica; Ricardo Fraiman e Isabel Cañete leyeron partes del manuscrito, sugiriendo mejoras y correcciones. A ellos nuestro agradecimiento. Un especial reconocimiento merecen Valentina y Rosana por su aliento, paciencia, y comprensión. Este libro fue posible gracias al apoyo del Centro de Matemática, la Comisión Sectorial de Investigación Científica (CSIC), y el Laboratorio de Probabilidad y Estadística, en la Universidad de la República; junto con el PEDECIBA–Matemática, y es el resultado de la colaboración científica entre nuestros países; tenemos la esperanza de que ayude a su fortalecimiento.

Los autores esperan que su trabajo resulte de utilidad a aquellas personas que estudian o enseñan teoría de la probabilidad.

Montevideo, abril de 2002. V. Petrov, E. Mordecki.

En la presente segunda edición se han corregido algunas erratas y agregado las soluciones de algunos ejercicios. Alejandro Cholaquidis, Javer Correa, Fabián Crocce, Nicolás Frevenza, Eusebio Gardella y Soledad Villar leyeron los diferentes capítulos aportando valiosas correcciones y sugerencias. Esta edición es posible gracias al apoyo del programa de publicaciones de la Comisión Sectorial de Investigación Científica de la Universidad de la República (CSIC).

Montevideo, noviembre de 2008. V. Petrov, E. Mordecki.

---

el libro de Borovkov [1].

Introducción para quienes comienzan a estudiar teoría de la probabilidad

La teoría de la probabilidad estudia modelos matemáticos de fenómenos aleatorios. Los fenómenos *aleatorios* son aquellos en los que la verificación de un cierto conjunto de condiciones determinadas, conduce a un resultado de una serie de resultados posibles. Por contraposición, los fenómenos *determinísticos*, o no aleatorios, son aquellos en los que la verificación de un cierto conjunto de condiciones determinadas conduce, en forma inevitable, a un resultado fijo (por ejemplo: el enfriamiento del agua hasta 0 grados centígrados bajo presión atmosférica normal conduce a la formación del hielo).

Llamamos *experimento* a cada uno de esos conjuntos de condiciones determinadas. Si un experimento consiste, por ejemplo, en tirar una moneda al aire, cada realización de este experimento conduce a uno de dos resultados posibles: la aparición de cara o la aparición de número, y no podemos, antes de realizar el experimento, conocer el resultado. Sin embargo, al repetir este experimento en una serie una gran cantidad veces, resulta que la cantidad de veces que aparece cara es, aproximadamente, la mitad de la cantidad de experimentos que componen la serie.

Dado un cierto experimento, llamamos *suceso* a cada uno de sus resultados posibles, y utilizamos las letras $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ (con índices o sin ellos) para designar los sucesos.

La *frecuencia* de un suceso $\mathbf{A}$ en un serie de n experimentos (o *frecuencia relativa*), se define como la proporción $f(\mathbf{A}) = m/n$, donde m es la cantidad de experimentos en los que el ocurrió el suceso $\mathbf{A}$. Es fácil de ver que la frecuencia así definida verifica las siguientes propiedades: (1) $0 \leq f(\mathbf{A}) \leq 1$ para cualquier suceso $\mathbf{A}$; (2) $f(\Omega) = 1$, si Ω representa el suceso *cierto* (es decir, un suceso que ocurre indefectiblemente en cada experimento); (3) $f(\mathbf{A} \text{ ó } \mathbf{B}) = f(\mathbf{A}) + f(\mathbf{B})$, si los sucesos **A** y **B** son incompatibles (es decir, no pueden ocurrir ambos sucesos simultáneamente).

Existe un muy amplio conjunto de situaciones en las que tiene lugar la estabilidad de las frecuencias antes mencionada; mas precisamente, en la verificación de un cierto conjunto de condiciones determinadas n_1 veces, luego n_2 veces, ..., luego n_k veces (es decir, se están llevando a cabo series de experimentos compuestas cada una por $n_1, n_2, \dots, n_k$ experimentos), las frecuencias de un suceso fijo **A**, resultante en las diferentes series, serán muy cercanas entre sí, siendo además esta proximidad mayor, en general, cuanto mayores sean los largos n_1, n_2, ..., n_k de estas series de experimentos.

Si el experimento consiste, por ejemplo, en tirar un dado (aquí tenemos 6 resultados posibles, correspondientes a la aparición en la cara superior del dado de una cantidad de puntos igual a 1,2,3,4,5 ó 6), se observa, luego de llevar a cabo algunas series de experimentos prolongadas, que la frecuencia resultante, por ejemplo, de la aparición de 6 puntos en cada serie, será aproximadamente igual a $1/6$. Existe también estabilidad en las frecuencias en indicadores de calidad de un cierto artículo, que se produce en serie. El porcentaje de artículos fallados, encontrado para distintas muestras de gran tamaño en la producción del artículo considerado, habitualmente, resulta prácticamente constante.

Esta constante, en torno a la cual se presentan las fluctuaciones de la frecuencia de un suceso **A** considerado, cuando se llevan a cabo series de experimentos prolongadas, se denomina *probabilidad* del suceso **A**. De esta forma, la probabilidad de un suceso **A** se puede considerar el valor teórico (o ideal) de la frecuencia de este suceso. La relación entre el concepto teórico de probabilidad y el concepto empírico de frecuencia, es como la relación entre una magnitud física (por ejemplo, la longitud de una mesa) y los resultados de su medición.

Lo dicho hasta ahora no es suficiente para construir una teoría matemática de los fenómenos aleatorios. La teoría de la probabilidad es parte de la matemática, y al igual que otras teorías, como por ejemplo la geometría, se construye sobre la base de un sistema de axiomas. La elección del sistema de axiomas se puede realizar de distintas formas. En el comienzo del capítulo 1 se expone un sistema de axiomas que en conjunto define la noción de probabilidad de forma tal, que las reglas válidas para las probabilidades coinciden con las reglas de las frecuencias antes descritas.

En la construcción de este sistema de axiomas dejamos de lado toda otra propiedad de las frecuencias, y asumimos la idea intuitiva de que la probabilidad de un suceso es el valor teórico de la frecuencia de este suceso.

Índice general

Los autores

Valentín Vladímirovich Petrov

Nació en Rusia en 1931. Es un reconocido especialista en el campo de la Teoría de la probabilidad. Profesor de la Universidad de San Petersburgo, Doctor en Ciencias (Instituto Steklov, Moscú, 1962), ha trabajado además en Estados Unidos, Europa, Australia y América Latina. Dedicado al estudio de los Teoremas límites en probabilidad, es autor de numerosos artículos científicos y libros, entre los que se destacan "Sums of independent random variables" (Naúka, 1972; Springer, 1975), "Limit theorems for sums of independent random variables" (Rusia, 1987; China, 1991) y "Limit theorems of probability theory" (Oxford, 1995).

Ernesto Mordecki

Nació en Uruguay en 1962. Es profesor de la Universidad de la República. Obtuvo su doctorado en Ciencias Físico-matemáticas en el Instituto Steklov de Moscú (1994). Trabaja en problemas de parada óptima y probabilidades de ruina en procesos estocásticos.