

Andrés Abella

Ernesto Mordecki

**Cálculo  
diferencial e integral  
con funciones  
de varias variables**

Universidad de la República

Facultad de Ciencias

DIRAC – 2015

*Los conceptos vertidos en los libros editados por la Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, son de responsabilidad de sus autores. Su publicación no implica que los mismos sean compartidos por las mencionadas instituciones.*

Abella, Andrés

*Cálculo diferencial e integral con funciones de varias variables*

Andrés Abella, Ernesto Mordecki.–Montevideo: DIRAC, 2015.

168 pp.

Bibliografía p. 167

ISBN: 978-9974-0-1244-8

1. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES
2. CÁLCULO DIFERENCIAL
3. CÁLCULO INTEGRAL

26-01

AMS MSC2000

Diseño de tapa: Alejandro Crosa

Asistente de edición: Gabriel Santoro

Publicado por DIRAC – Facultad de Ciencias – Universidad de la República

Calle Iguá 4225 casi Mataojo – Montevideo – Uruguay

Tel. (0598) 2525 1711 – Fax (0598) 2525 8617 – e-mail: [dirac@fcien.edu.uy](mailto:dirac@fcien.edu.uy)

© DIRAC – Facultad de Ciencias, Universidad de la República, 2015.

# Contenidos

<b>Prólogo</b>	<b>5</b>
<b>Introducción</b>	<b>7</b>
<b>1. Nociones topológicas de <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>11</b>
1.1. El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ . . . . .	11
1.2. Producto escalar y norma . . . . .	12
1.3. Sucesiones . . . . .	16
1.4. Conjuntos abiertos y cerrados . . . . .	20
1.5. Compacidad . . . . .	23
1.6. Funciones de varias variables . . . . .	27
1.7. Continuidad . . . . .	31
1.8. Continuidad uniforme . . . . .	36
1.9. Conexión . . . . .	38
<b>2. Integrales múltiples</b>	<b>41</b>
2.1. Integración en rectángulos . . . . .	41
2.2. Conjuntos de contenido nulo . . . . .	54
2.3. Conjuntos medibles Jordan . . . . .	57
2.4. Integración en conjuntos medibles Jordan . . . . .	61
2.5. Cálculo de integrales . . . . .	63
2.5.1. Integrales iteradas . . . . .	63
2.5.2. Cambio de variables. . . . .	67
2.6. Generalización . . . . .	71
2.7. Conjuntos de medida nula . . . . .	77
2.8. El teorema de Lebesgue . . . . .	81
2.9. Relación entre medida nula y contenido nulo . . . . .	87

<b>3. Funciones diferenciables de <math>\mathbb{R}^n</math> en <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>91</b>
3.1. Derivadas parciales y direccionales . . . . .	93
3.2. Diferenciabilidad . . . . .	99
3.3. Regla de la cadena . . . . .	108
3.4. Regla de Leibniz . . . . .	113
3.5. Derivadas de orden superior . . . . .	117
3.6. Fórmula de Taylor . . . . .	121
3.7. Extremos relativos y absolutos . . . . .	125
3.8. Extremos condicionados . . . . .	131
3.9. Función implícita . . . . .	136
<b>4. Funciones diferenciables de <math>\mathbb{R}^n</math> en <math>\mathbb{R}^m</math></b>	<b>143</b>
4.1. Funciones diferenciables . . . . .	143
4.2. Teorema de la función inversa . . . . .	149
4.3. Multiplicadores de Lagrange y función implícita . . . . .	159
<b>Bibliografía</b>	<b>167</b>

# Prólogo

Este libro surgió como síntesis de numerosos cursos de Cálculo Diferencial e Integral II de la Licenciatura en Matemática de la Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, que fuimos dictando entre varios compañeros del Centro de Matemática de dicha facultad. El primer antecedente son las notas manuscritas preparadas por Fernando Peláez, que Ernesto Mordecki se propuso “pasar a Latex” a comienzos del primer decenio del 2000. Más adelante Andrés Abella se integra al equipo para completarlas y darles un estilo uniforme. En el proceso surgieron diversas versiones más o menos completas, bajo el título de “notas”, que fueron utilizadas en diferentes cursos, algunas de las cuales circulan por internet. El proyecto original preveía la inclusión de figuras (que llegaron a prepararse para el primer capítulo) e incluso la de ejercicios en sage (<http://www.sagemath.org/>) software matemático altamente recomendable para seguir el curso, objetivos que no llegaron a concretarse. Sin embargo sí se escribieron todas las definiciones, y los enunciados y demostraciones de los teoremas, presentando un curso teórico completo de cálculo en varias variables. Los autores esperan que el material presentado sea de utilidad para los cursos de las licenciaturas en Matemática y Física, así como para cursos de Ingeniería, Formación Docente, etc., o para cualquiera que esté interesado en aprender de estos temas.

Montevideo, junio de 2015.

A. Abella, E. Mordecki.



# Introducción

El objetivo de este libro es introducir al lector en el estudio de las funciones de varias variables, es decir, del tipo  $f : X \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , donde  $\mathbb{R}$  es el conjunto de números reales. Se distingue especialmente el caso  $m = 1$ , en el cual la función se llama escalar, del caso general, en el que la función se llama vectorial. Se ha buscado que la exposición sea clara evitando la abstracción innecesaria. Por ejemplo, en el caso de funciones escalares, se han preferido demostraciones para funciones definidas en subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  que permiten llamar a las variables  $x$  e  $y$ , en vez de pruebas en  $\mathbb{R}^n$  en general que obligan a usar subíndices y puntos suspensivos  $x_1, \dots, x_n$ . Creemos que esto ayuda a quienes estudian el tema por primera vez a concentrarse en las ideas que están en la demostración, minimizando las complicaciones que genera trabajar con notaciones más complicadas. Sin embargo, en todos los casos se dan los enunciados generales de los teoremas, para que se puedan aplicar en cualquier situación y no solo en  $\mathbb{R}^2$ . Es de notar que las mismas pruebas que vemos en  $\mathbb{R}^2$  valen en general, el lector interesado puede hacer el ejercicio de escribirlas por sí mismo. Vale la pena observar que en el teorema de la función implícita, la prueba para funciones escalares no vale para funciones vectoriales; en este caso se dan las dos pruebas, una en el capítulo 3 y la otra en el 4, dado que la primera es más simple y natural que la segunda. Por completitud también se hace lo mismo con la regla de la cadena, aunque en este caso la prueba del caso vectorial parece más natural. En el caso de los multiplicadores de Lagrange, por brevedad se optó por dar solo la prueba del caso vectorial, quedando el escalar como un caso particular del anterior.

Una particularidad de este libro es que introduce el cálculo integral antes del cálculo diferencial. Esto se debe a una razón didáctica: los razonamientos en el cálculo integral están mucho más próximos a los de continuidad que a los de diferenciabilidad. Por otro lado la técnica básica

del cálculo de integrales en varias variables es el cálculo por integrales iteradas, que lo reduce al cálculo de integrales en una variable. Esta es una diferencia notable con el cálculo en una variable, que reduce el cálculo de integrales al cálculo de primitivas. Sin embargo esto genera un problema puesto que el teorema de cambio de variables de integrales múltiples requiere el cálculo de derivadas parciales. Para esto se introducen en el momento las derivadas parciales y se enseña a trabajar con ellas, dejando su formalización para el capítulo siguiente. Conviene aclarar que en este libro no presentamos la prueba del teorema de cambio de variables, así que la falta de formalidad anterior no afecta la lógica del mismo. Si bien quien lo prefiera puede leer antes los dos últimos capítulos y luego el tercero, recomendamos que se sigan los capítulos en el orden del libro y eventualmente al finalizarlo releer la parte de cambio de variables.

A continuación hacemos una breve descripción del contenido de los capítulos del libro.

El capítulo 1 es básico para el resto del libro y consiste en una introducción al estudio de la topología de  $\mathbb{R}^n$ . Se definen los conceptos de conjunto abierto, cerrado, compacto, etc. Se estudian las sucesiones y sus subsucesiones, con miras a aplicarlas en el desarrollo teórico del texto. Se estudian los límites y la continuidad de funciones. Se introduce el concepto de continuidad uniforme que es necesario para el estudio de la integrabilidad y el de conexión que se utiliza en diferenciabilidad.

En el capítulo 2 estudiamos las integrales de funciones escalares de varias variables. Existen distintos tipos de integrales, pero en este libro por integral nos referimos a la integral de Riemann. En las secciones 2.1 a 2.5 se desarrolla la teoría de integración para funciones de dos variables, primero para funciones definidas en rectángulos y luego para dominios más generales. En la sección 2.6 se generaliza lo anterior para funciones de más de dos variables. Si el objetivo del lector es aprender a calcular integrales, entonces alcanza con leer las secciones anteriores. Las secciones 2.7 a 2.9 son para quienes estén interesados en realizar un estudio más profundo de la teoría, introduciendo el concepto de conjunto de medida nula y llegando hasta el teorema de caracterización de funciones integrables según Riemann debido a Henri Lebesgue.

En el capítulo 3 estudiamos la diferenciabilidad de las funciones escalares de varias variables. Se definen las derivadas parciales y el diferencial.

Se prueba la regla de la cadena para el cálculo de derivadas parciales de funciones compuestas. Se ve la regla de Leibniz para derivar funciones definidas mediante integrales y se la aplica para probar el teorema de Schwarz sobre derivadas parciales cruzadas. Se prueba la existencia del desarrollo de Taylor y se lo aplica al estudio de extremos. Se estudian los extremos condicionados y se enuncia el teorema de los multiplicadores de Lagrange, relegando su prueba a su versión general en el capítulo 4. Finalmente se estudian las funciones definidas implícitamente.

En el capítulo 4 estudiamos las funciones vectoriales de varias variables. Se define el diferencial de una función y se prueba la versión general de la regla de la cadena. Se introducen los difeomorfismos y se prueba el teorema de la función inversa. Como aplicación de este último, se prueban las versiones generales del teorema de los multiplicadores de Lagrange y del teorema de la función implícita.

Para leer este libro es conveniente que el lector tenga conocimientos de cálculo diferencial e integral para funciones de una variable, y también de álgebra lineal en  $\mathbb{R}^n$ . Respecto al cálculo, se espera que sepa operar con sucesiones, calcular límites, derivadas e integrales, y que conozca los fundamentos teóricos correspondientes. Respecto al álgebra lineal, debe estar familiarizado con el trabajo con matrices, determinantes y transformaciones lineales. Conviene también que entienda de vectores propios y transformaciones lineales en espacios con producto interno, en caso contrario va a tener que admitir algún resultado.